2019 年度教育部高等学校自然科学奖

推荐项目公示

一、 项目名称：

齐性空间的整点（Integral points on homogeneous spaces）

二、 推荐单位：

首都师范大学

三、 主要完成人情况表：

姓　　名	徐飞	排　　名	1
技术职称	教授	工作单位	首都师范大学
完成单位	首都师范大学		
曾获科技奖励情况	无		
对本项目技术创造性贡献：			
将 Brauer-Manin 障碍引入研究代数簇的整点问题，并证明对于非紧的单连通，半单代数群并具有联通稳定子的齐性空间，它的整点存在性完全由 Brauer-Manin 障碍确定。将许多关于整点存在的零散结论都统一这个理论中。彻底解决虚二次域的三平方和问题。建立了含二次特征标的权公式，并由此给出 spinor genus 的权公式，证明了某些二次纤维化空间 Brauer-Manin 障碍下的强逼近定理。给出秩大于 2 的整二次型由 spinor genus 表示的有效判别法。建立了特征 2 的二次型的 spinor genus 理论。对由数域扩张的范数定义的丢番图方程，构造出了有限多个能够判定这种丢番图方程是否有整数解的 Brauer 群中的元素。			

四、项目简介：

丢番图方程问题伴随着数论漫长历史的发展，成为推动现代数学研究的动力之一。从著名的希尔伯特 23 个问题中的第 10 和 11 个问题，Wiles 解决著名的 Fermat 猜想，到千禧年七大问题中的 BSD 猜想都说明了该领域在数学中的核心地位。

本项目研究由代数群的齐性空间定义的丢番图方程。主要的研究工具为代数数论（特别是类域论），代数群算术性质，etale 上同调以及代数几何等内容。以下是本项目取得的主要科学成就：

将 Brauer-Manin 障碍引入研究代数簇的整点问题。并证明对于非紧的单连通，半单代数群的齐性空间的整点存在性完全由 Brauer-Manin 障碍确定。这一结论将许多关于整点存在的零散结论统一起来。作为一项应用，彻底解决的虚二次域的三平方和问题。该项成果诱发了一系列关于 Brauer-Manin 障碍下强逼近理论的研究。例如，Kresch 教授（瑞士苏黎士大学）与 Tschinkel 教授（美国纽约大学科朗研究院，ICM invited speaker）给出整点的 Brauer-Manin 障碍进一步的例子，Poonen 教授（美国麻省理工学院，美国艺术与科学研究院会员，ICM invited speaker）关于丢番图集的工作，Borovoi 教授（以色列特拉维夫大学，ICM invited speaker）与 Demarche（法国巴黎 6 大学）对于更一般齐性空间的 Brauer-Manin 障碍的强逼近理论的推广。Akhtari（美国俄勒冈大学）与 Bhargava 教授（美国普林斯顿大学，Fields 奖获得者，美国国家科学院院士）在他们的论文中指出了这项工作。美国数学会评论写到：这项技术研究整点的局部-整体原则是第一次

(this technique is applied to the study of local-global principles for integral points for the first time)。Wittenberg（法国巴黎 11 大学）为美国数学会出版的 Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 撰写的综述文章中指出：这是整点方向基础性工作（a foundational work）。这项工作也被诸多国际重要学术杂志，如 Ann. Sci. Éc. Norm. Super.; J. Reine Angew. Math.;Amer.J.Math.; Proc. Lond. Math. Soc.; Compos. Math.; Comment. Math. Helv.; Forum Math.; J. Lond. Math. Soc.; Ann. Inst. Fourier; Israel J. Math.; Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.; Math. Res. Lett.; J. Algebraic Geom.; Algebra Number Theory 等,多次引用。

更进一步，将纤维化方法应用于证明代数簇关于 Brauer-Manin 障碍的强逼近理论。对于纤维为正交群的齐性空间（二次型）的情形做了更深入地研究。特别对于每一个有理点的纤维都不满足强逼近这种全新的现象，通过加入算术迷向和约化理论这些新工具建立于 Brauer-Manin 障碍的强逼近理论。这项工作被数学顶级刊物 Annals of Mathematics 所引用。

给定的丢番图方程，如何明确的决定出 Brauer-Manin 障碍，给出方程有解的可以简单验证的初等条件？我们对由数域扩张的范数定义出的丢番图方程做了系统地研究，给出了决定 Brauer-Manin 障碍的方法，并应用于数域的二平方和问题。这项工作被 Proc. Lond. Math. Soc.等国际重要学术杂志引用。

五、代表性论文专著目录：

1. Jean-Louis Colliot-Thelene, Fei Xu: Brauer-Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation by integral quadratic forms, Compositio Mathematica **145** (2009), 309-363.
2. Fei Xu: Representation masses of spinor genera, Duke Mathematical Journal **110** (2001), 279-307.
3. Fei Xu: Strong approximation for certain quadratic fibrations with compact fibers, Advances in Mathematics **281** (2015), 279-295.
4. Fei Xu: On representations of spinor genera II, Mathematische Annalen **332** (2005), 37-53.
5. Yuanhua Wang, Fei Xu: Spinor genera in characteristic 2, Memoirs of the American Mathematical Society **194** (2008), 1-86
6. Dasheng Wei, Fei Xu: Integral points for multi-norm tori, Proceedings of the London Mathematical Society **104** (2012), 1019-1044.
7. Wai Kiu Chan, Fei Xu: On representations of spinor genera, Compositio Mathematica **140** (2004), 287-300.
8. Jean-Louis Colliot-Thelene, Fei Xu: Strong approximation for the total space of certain quadratic fibrations, Acta Arithmetica **167** (2013), 169-199.